Groupe C

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les parties II, III et IV de l'énoncé sont totalement indépendantes.

Les parties II et III portent sur l'application au calcul intégral (en II) et au calcul de sommes de familles finies ou de séries (en III) de la propriété notée D (x) *introduite au début de I, et relative aux fonctions réelles de variables réelles; la partie I permet de se familiariser avec cette propriété, mais l'avoir traitée n'est pas indispensable pour II et III.*

La partie IV porte sur la généralisation au cas des fonctions de deux variables de la propriété D(x), *et à son application à la géométrie; elle utilise le résultat de I 3°.*

I

Soit φ une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit x un élément de I. On dit que φ possède la propriété D (x) s'il existe un nombre réel, noté λ, dépendant de x, tel que, quel que soit y appartenant à I, on ait

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \lambda(y - x)$$

1° Donner une interprétation géométrique, portant sur le graphe de φ, de la propriété D (x).

2° *a.* On considère le cas où x n'est pas une extrémité de l'intervalle I; on suppose que φ admet en x une dérivée à gauche et une dérivée à droite, notées respectivement $\varphi'_g(x)$ et $\varphi'_d(x)$, et que φ possède la propriété D (x). Qu'en déduit-on sur le couple $(\varphi'_g(x), \varphi'_d(x))$? Que peut-on dire alors de λ ?

b. On considère le cas où x est une extrémité de I; quel résultat analogue à celui de *a* peut-on alors énoncer ?

3° *a.* On suppose φ dérivable sur tout son domaine de définition I.

Démontrer qu'une condition suffisante pour que φ vérifie la propriété D (x) en tout x de I est que la fonction dérivée φ' soit croissante.

En déduire que, si φ est deux fois dérivable sur tout son domaine de définition, une condition suffisante pour que φ vérifie la propriété D (x) en tout x est qu'elle soit localement convexe en tout x appartenant à I.

b. On suppose φ dérivable sur tout I, sauf en un point x_0 en lequel elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche; quel résultat analogue à celui de *a* peut-on alors énoncer ?

c. Pour quelles valeurs de α (> 0) l'application φ, définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = |x|^\alpha$, possède-t-elle la propriété D (x) en tout x ?

4° On considère l'application φ, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x) = 1 - \exp(-x^2)$.

a. Pour quelle(s) valeur(s) de x φ est-elle localement convexe ?

Pour quelle(s) valeurs(s) de x φ possède-t-elle la propriété D (x) ?

b. Étant fixé a (> 0), on note φ_a la restriction de φ à l'intervalle $[-a, a]$.

Démontrer qu'il existe b, dans l'intervalle $]0, a]$, tel que φ_a possède la propriété D (x) si et seulement si $|x| \leqslant b$.

N.B. — *Il pourra être utile à cet effet d'étudier la variation de l'application* ψ *définie sur* $[0, a]$ *par*

$$\psi(x) = (1 - 2ax + 2x^2)\exp(-x^2).$$

Pour quelles valeurs de a a-t-on $b = a$?

Vérifier que, si $a = 1$, b est compris entre 0,5 et 0,6; par interpolation linéaire de la fonction ψ sur l'intervalle [0,5, 0,6], fournir une approximation de b. S'en servir pour effectuer un tracé du graphe de φ_1 (on placera avec précision les points d'abscisses b, $\sqrt{2}/2$ et 1).

Tournez la page S. V. P.

II

Soit $[c, d]$ un intervalle fermé borné, et soient φ et f deux applications continues de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$; on suppose de plus que f est à valeurs positives ou nulles, et non identiquement nulle.

On pose :
$$x_0 = \frac{\int_c^d t\, f(t)\, dt}{\int_c^d f(t)\, dt}.$$

1° *a.* Démontrer que x_0 appartient à l'intervalle $[c, d]$.

b. Démontrer que, si φ vérifie la propriété D (x_0), on a

(1) $$\varphi\left(\frac{\int_c^d t\, f(t)\, dt}{\int_c^d f(t)\, dt}\right) \leqslant \frac{\int_c^d \varphi(t)\, f(t)\, dt}{\int_c^d f(t)\, dt}.$$

c. Écrire (1) dans le cas où $\varphi(t) = |t|^\alpha$ (avec $\alpha \geqslant 1$).

Proposer d'autres justifications du résultat obtenu dans le cas $\alpha = 1$ et dans le cas $\alpha = 2$.

2° On suppose que $\int_c^d f(t)\, dt = 1$. La formule (1) devient alors

(1') $$\varphi\left(\int_c^d t f(t)\, dt\right) \leqslant \int_c^d \varphi(t)\, f(t)\, dt.$$

a. Donner une interprétation de (1') dans le vocabulaire du calcul des probabilités (on adoptera la notation E pour « espérance mathématique »).

On remarque (*il n'est pas demandé de le justifier*) que (1') reste vrai si l'une au moins des extrémités c et d est infinie ($-\infty$ pour c et $+\infty$ pour d), à condition de supposer que les intégrales

$$\int_c^d t\, f(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad \int_c^d \varphi(t)\, f(t)\, dt$$

sont bien définies (autrement dit sont convergentes).

b. Démontrer que si une variable aléatoire X, de densité f, admet un moment d'ordre s (où $s > 0$) fini, alors elle admet aussi des moments finis à tous les ordres r inférieurs à s, et l'application, de $]0, s]$ dans $[0, +\infty[$ qui à r associe $[E(|X|^r)]^{\frac{1}{r}}$ est croissante.

Préciser cette propriété dans le cas d'une variable aléatoire de loi exponentielle, et en se limitant aux valeurs de r entières (pour lesquelles on calculera explicitement les moments).

III

Soit φ une application continue de I, intervalle de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$.

1° Étant fixé un entier strictement positif N, soient $(a_1, \ldots, a_N)$ et $(p_1, \ldots, p_N)$ deux familles de N nombres réels; on suppose de plus que tous les a_j appartiennent à I et que les p_j sont positifs ou nuls (mais non tous nuls).

Tournez la page S. V. P.

On note $J = \{1, \ldots, N\}$ et on pose $x_0 = \dfrac{\sum_{j \in J} a_j p_j}{\sum_{j \in J} p_j}$.

a. Démontrer que x_0 appartient à I.

b. Démontrer que, si φ possède la propriété D (x_0), on a

$$\varphi\left(\frac{\sum_{j \in J} a_j p_j}{\sum_{j \in J} p_j}\right) \leqslant \frac{\sum_{j \in J} \varphi(a_j)\, p_j}{\sum_{j \in J} p_j}. \tag{2}$$

c. Écrire (2) dans le cas où $\varphi(t) = |t|^\alpha$ (avec $\alpha \geqslant 1$).

2° On suppose que $\sum_{j \in J} p_j = 1$; la formule (2) devient alors

$$\varphi\left(\sum_{j \in J} a_j p_j\right) \leqslant \sum_{j \in J} \varphi(a_j)\, p_j. \tag{2'}$$

a. Donner une interprétation de (2') dans le vocabulaire du calcul des probabilités (on adoptera la notation E pour « espérance mathématique »).

b. Soient maintenant $(a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ et $(p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ deux suites de nombres réels telles que, pour tout n, a_n appartienne à I et p_n soit positif ou nul.

On suppose que les séries de termes généraux p_n, $a_n p_n$ et $\varphi(a_n)\, p_n$ sont toutes trois convergentes et que de plus $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n = 1$.

Démontrer que, si on pose $J = \mathbb{N}^*$, la formule (2') reste valable dans ce cas.

c. Démontrer que, si une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre s (où $s > 0$) fini, elle admet aussi des moments finis à tous les ordres r inférieurs à s, et l'application, de $]0, s]$ dans $[0, +\infty[$, qui à r associe

$$[E(|X|^r)]^{\frac{1}{r}} \qquad \text{est croissante.}$$

Préciser cette propriété dans le cas d'une variable aléatoire de Poisson (*le calcul explicite des moments n'est pas demandé*).

IV

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ convexe, c'est-à-dire telle que, si deux points M_1 $(= (x_1, y_1))$ et M_2 $(= (x_2, y_2))$ appartiennent à A, il en est de même de tous les points du segment joignant M_1 et M_2 (c'est-à-dire de tous les points $(kx_1 + (1 - k)\, x_2, ky_1 + (1 - k)\, y_2)$, où $0 \leqslant k \leqslant 1$).

Soit φ une application de A dans $\mathbb{R}$, et soit M un élément de A. On dit que φ possède la propriété D (M) s'il existe un vecteur $\vec{U}$ tel que, pour tout élément M' de A, on ait

$$\varphi(M') - \varphi(M) \geqslant \vec{U} \cdot \overrightarrow{MM'},$$

où la notation . désigne le produit scalaire usuel.

Tournez la page S. V. P.

1° Donner une interprétation géométrique de la propriété D (M) .

2° À tout élément M ($= (x, y)$) de A et tout vecteur $\vec{U}$ ($= (v, w)$) , on associe la fonction réelle de variable réelle $\varphi_{M,\vec{U}}$ définie par $\varphi_{M,\vec{U}}(t) = \varphi(x + tv, y + tw)$.

a. Démontrer que le domaine de définition de $\varphi_{M,\vec{U}}$ est un intervalle.

b. Démontrer que, pour que φ possède la propriété D (M) , il faut et il suffit que, pour tout $\vec{U}$, $\varphi_{M,\vec{U}}$ possède la propriété D (0) .

3° On suppose que φ admet des dérivées partielles d'ordres 1 et 2, et que toutes ces dérivées partielles sont continues.

a. Exprimer $\varphi'_{M,\vec{U}}(0)$ à l'aide des dérivées partielles d'ordre 2 de φ en M .

b. Donner une condition suffisante, portant sur les fonctions dérivées partielles d'ordre 2 de φ , pour que φ vérifie la propriété D (M) en tout point M de A .

4° Soit un entier strictement positif N , et soient N points $M_1, \ldots, M_N$ de A ; on pourra noter, pour tout j compris entre 1 et N , $M_j = (x_j, y_j)$. Soient par ailleurs N nombres réels positifs ou nuls, non tous nuls, $p_1, \cdots, p_N$.

Soit G le barycentre des points M_j , affectés des masses p_j .

a. Démontrer que G appartient à A .

b. On suppose que φ possède la propriété D (G) ; démontrer qu'alors on a

$$\varphi(G) \leqslant \frac{\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \varphi(M_j)\, p_j}{\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} p_j} . \tag{3}$$

c. Dans le cas où $\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} p_j = 1$, donner une interprétation probabiliste de (3) .

(On pourra, si on le désire, parler d'un couple de variables aléatoires (X , Y)).

d. On considère une variable aléatoire discrète, à valeurs dans l'ensemble C des nombres complexes : on suppose que les seules valeurs prises avec une probabilité non nulle sont les racines n-ièmes de 1 (n étant fixé).

Utilisant la représentation géométrique des nombres complexes dans $\mathbb{R}^2$, justifier la validité de la formule (3) dans le cas où φ est l'application définie par

$$\varphi(x, y) = |x|^\alpha + |y|^\alpha \quad (\text{avec } \alpha > 1) .$$

et expliciter le résultat obtenu.

o o o
o

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail